機械計算力学における弱肉強食の数値解析

機械工学科　芳賀正和

1. はじめに

福井高専機械工学科５年選択科目の機械計算力学では，機械工学における数値解析についての講義を総合情報処理センター第１演習室で行っている．本講義では，現象の支配方程式を導出し，差分法による離散化を行い，数値計算プログラムの作成と計算結果の解析を学ぶ．以下では，機械計算力学の内容の中から弱肉強食の数値解析について紹介する．

2. 支配方程式および差分化

食物連鎖における草食動物と肉食動物の個体数 x, y の変化を考える．

草食動物はその個体数 x に比例して増殖する．このときの比例係数を ε_1, 時間を t とすると，草食動物の増加は下式で与えられる．

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon_1 x \tag{1}$$

また，肉食動物に食べられて減少する分を考える．この割合を草食動物と肉食動物の出会う確率 xy に比例するとし，

$$\frac{dx}{dt} = -k_1 xy \tag{2}$$

とする．ただし，k_1 は比例係数である．式 (1) および式 (2) より草食動物の個体数 x の変化を，

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon_1 x - k_1 xy \tag{3}$$

と表すことができる．

一方，肉食動物は自然死により減少する．この割合を肉食動物の個体数 y に比例するとし，この比例係数を ε_2 する．

$$\frac{dy}{dt} = -\varepsilon_2 y \tag{4}$$

肉食動物は，草食動物を食べることのできた割合に比例して増殖するので，この比例係数を k_2 とし，

$$\frac{dy}{dt} = k_2 xy \tag{5}$$

となる．式 (5) と式 (6) より肉食動物の個体数 y の変化は次式になる．

$$\frac{dy}{dt} = -\varepsilon_2 y + k_2 xy \tag{6}$$

式(3),(6)の無次元化を行い，無次元支配方程式を求める．無次元での草食動物と肉食動物の個体数および時間をそれぞれ X, Y, t とし，次のように無次元化する．

$$X = \frac{x}{\varepsilon_1 / k_1} \quad , \quad Y = \frac{y}{\varepsilon_1 / k_1} \quad , \quad \tau = \frac{t}{1/\varepsilon_1} \tag{7}$$

式 (7) より式 (3), (6) を無次元化し無次元支配方程式を得る．

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{d\tau} = X - XY \\ \dfrac{dY}{d\tau} = -E \cdot Y + K \cdot XY \end{cases} \tag{8}$$

ここで，E は ε_1 と ε_2 の比，K は k_1 と k_2 の比を表す無次元パラメータである．

$$E = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad K = \frac{k_2}{k_1} \tag{9}$$

式 (8) の時間微分を差分化して差分式を得る．

$$\begin{cases} X(\tau + \Delta\tau) = X(\tau) + \Delta\tau \cdot \left[X(\tau) - X(\tau) \cdot Y(\tau) \right] \\ Y(\tau + \Delta\tau) = Y(\tau) \\ \qquad + \Delta\tau \cdot \left[-E \cdot Y(\tau) + K \cdot X(\tau) \cdot Y(\tau) \right] \end{cases} \tag{10}$$

式 (10) は漸化式になっている．初期の個体数 $X(0)$, $Y(0)$ と無次元パラメータ E, K および時間間隔 $\Delta\tau$ を与えてやれば，その後の個体数を順次求めていくことが出来る．

4. 数値計算プログラム

本講義での数値計算プログラムの言語は C 言語とした．プログラムに使用した変数を Table 1 に，C 言語の計算プログラムを Fig.1 に示す．

5. 結果の解析

計算を実行すると，「xy.txt」のファイルが作成され，時刻 τ, 個体数 X, Y の列順に記録されているので，EXCEL を用いてグラフとして表示する．計算パラメータの値によって，(i) 死滅する，(ii) 周期的に増減を繰り返す，(iii) 不規則なカオス的振る舞いをする，などの結果が得られる．

この系では，固体種が２種しかないが，時間間隔 $\Delta\tau$ もカオス的振る舞いの原因となる変数として振る舞うため，カオスが発生する．自然界における個体数の変動は今回の結果よりもずっと複雑であり，正しく求めるためには固体種を増やす必要がある．しかし，個体数の変動の複雑さには，カオス的振る舞いが重要な役割をしていることがわかる．

Table1プログラム中の変数

変数名	数値
count	現在の計算回数
dt	時間ステップ
exit	計算を終了させる回数
k	無次元パラメータK
e	無次元パラメータE
time	無次元時間
xnew	草食動物の個体数の新値
xold	草食動物の個体数の旧値
ynew	肉食動物の個体数の新値
yold	肉食動物の個体数の旧値

6. まとめ

機械計算力学における弱肉強食の数値解析を紹介した．本講義を通して，様々な現象の支配方程式への理解が深まり，機械工学に関する諸学に還元され，自力で数値解析を行うようになる事を期待している．

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
void main(void)
{
 FILE *fp1,*fp2;
 double xold,yold,xnew,ynew,xold,yold,e,k,dt,time;
 int count,exit;

 fp1=fopen("xy.txt","w");

 printf("  Xo = ");
 scanf("%lf", &xold);
 printf("  Yo = ");
 scanf("%lf", &yold);
 printf("  E = ");
 scanf("%lf", &e);
 printf("  K = ");
 scanf("%lf", &k);
 printf("Time Step  dt = ");
 scanf("%lf", &dt);
 printf("Exit Count = ");
 scanf("%d", &exit);

 time=0.0;
 fprintf(fp1,"%17.9e %17.9e %17.9e¥n", time,xold,yold);

 for(count=1;count<=exit;count++)
 {
  xnew=xold+dt*(xold-xold*yold);
  ynew=yold+dt*(-e*yold+k*xold*yold);

  time=count*dt;

  fprintf(fp1,"%17.9e %17.9e %17.9e¥n",time,xnew,ynew);

  xold=xnew;
  yold=ynew;
 }

 fclose(fp1);
}
```

Fig.1 プログラム